

講義中の注意

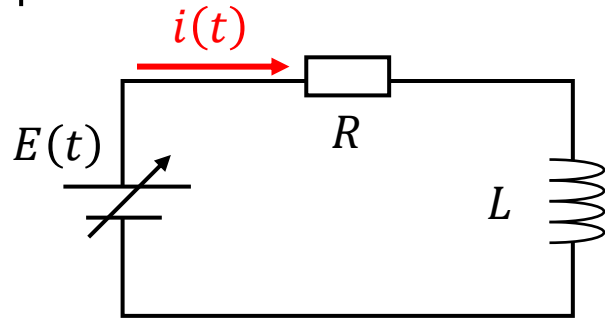


- 講義中は、参加者のマイク・カメラの機能はミュート状態になります。
- 進行はスタッフ及び講師が行いますので、指示に従ってください。
- 質疑応答の時間は、参加者のマイクをオンにして質問を受け付けることもあります。希望される方は「チャット欄」で申し出てください。

電験二種二次対策 オンライン講座

第3回 過渡応答 (逆ラプラス変換、最終値の定理)

過渡応答 (ステップ応答)



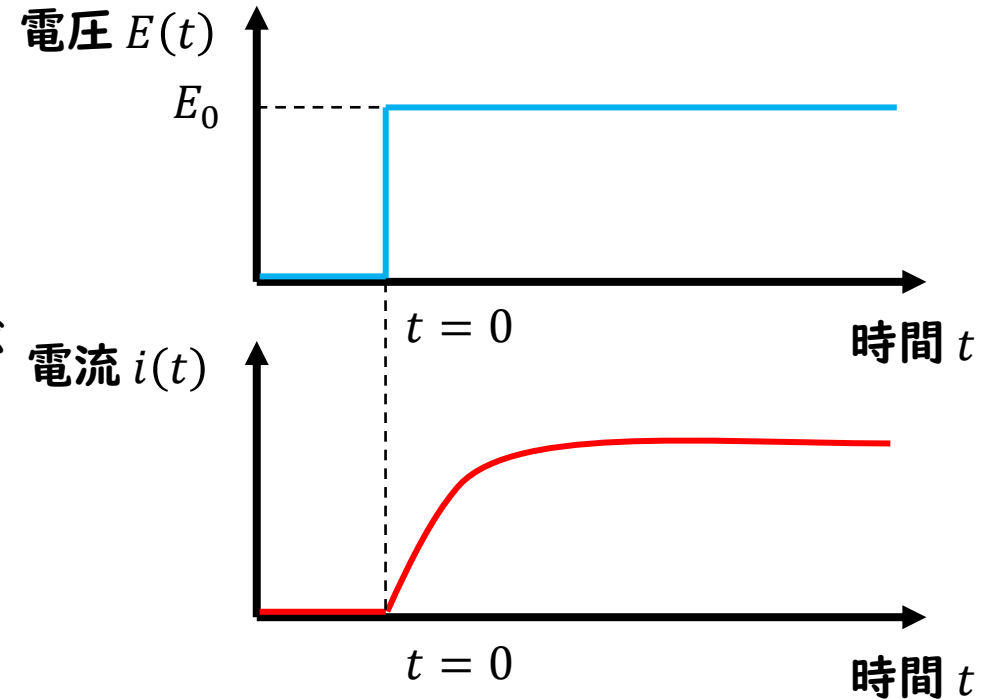
$E(t)$ は $E_0 u(t)$ と表し、
 $u(t)$ は、

$$1 \quad (t \geq 0)$$

$$0 \quad (t < 0)$$

→ こういう関数を

『ステップ関数 $u(t)$ 』 と呼ぶ



$$E(t) = E_0 u(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} E_0 U(s) = RI(s) + sLI(s)$$

$$I(s) = \frac{E_0}{R + sL} U(s) = \frac{E_0}{R + sL} \frac{1}{s}$$

ステップ関数
のラプラス変換

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s}$$

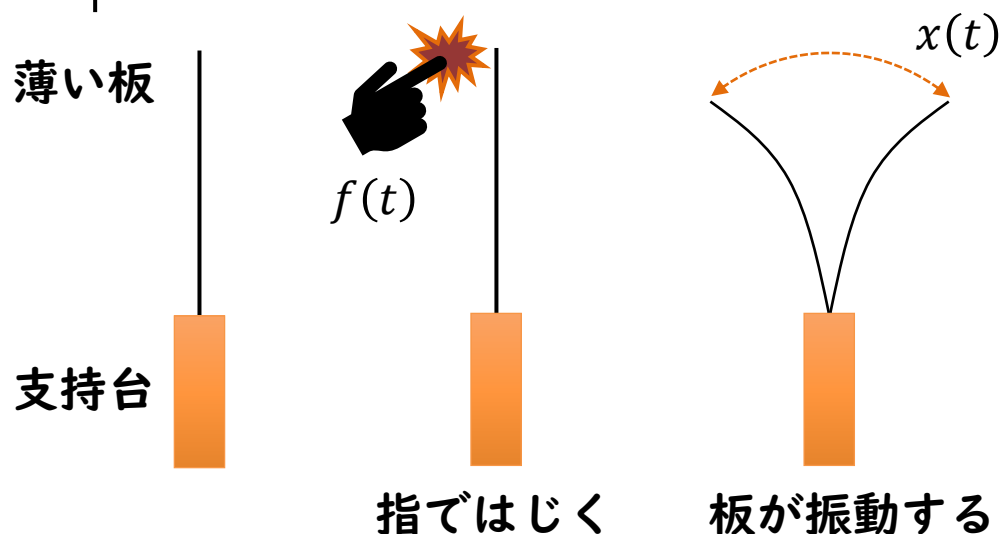
$$I(s) = \frac{E_0}{R + sL} \frac{1}{s} = \frac{E_0}{L} \frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{E_0}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \xrightarrow{\text{最終値の定理}} i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s I(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E_0}{L} \frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{E_0}{R}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} I(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-tR/L}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} i(\infty) = \frac{E_0}{R}$$

最終値の定理

$$f(\infty) \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

過渡応答（インパルス応答）



$f(t)$ は $\delta(t)$ と表し、
 $\infty (t = 0)$
 $0 (t \neq 0)$
 →こういう関数を
 『デルタ関数 $\delta(t)$ 』と呼ぶ

$$x(t) = g(t)f(t) \longrightarrow x(t) = X_0(t)\sin \omega_0 t$$

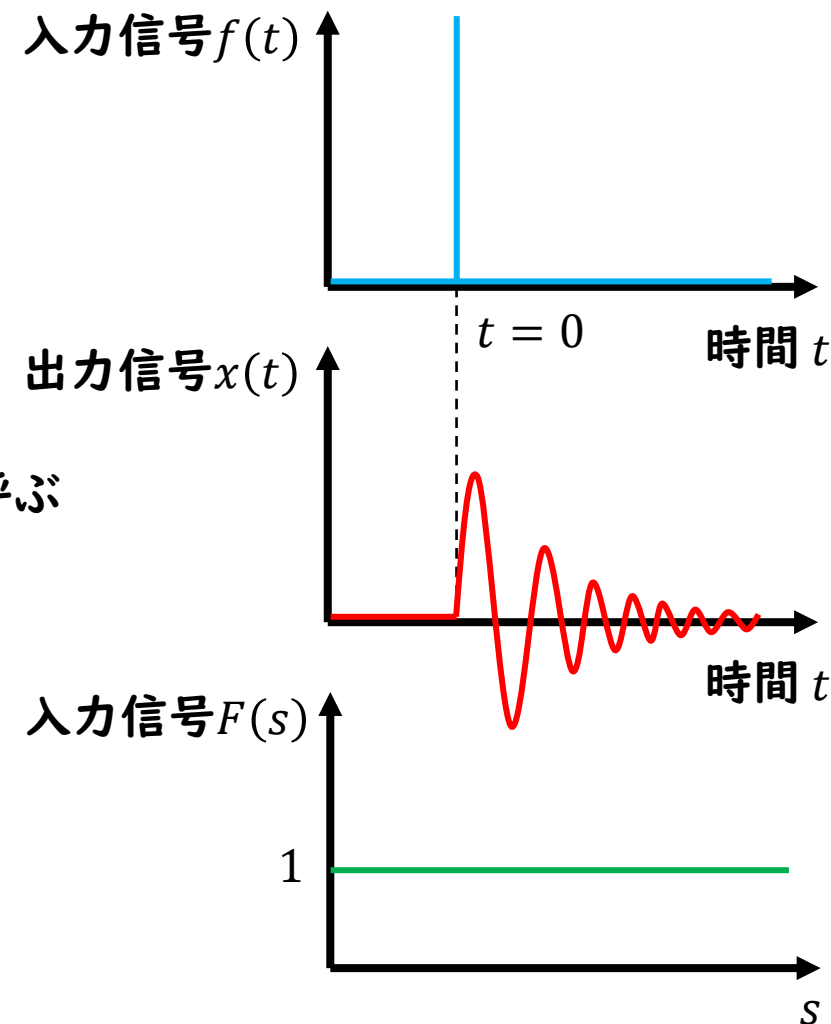
瞬間的な入力信号
(インパルス入力)

ある周波数で振動する

時間的に非常に短い信号は、周波数の世界（ラプラス変換）
では全周波数帯域の成分を有する

デルタ関数のラプラス変換
 $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$

$$x(t) = g(t)\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = G(s) \cdot 1$$



過渡応答と偏差まとめ

過渡応答	入力信号（時間領域）	入力信号（ラプラス領域）	出力信号（ラプラス領域）
インパルス応答	$\delta(t) = \infty (t = 0)$ $= 0 (t \neq 0)$	1	$G(s) \cdot 1$
ステップ応答	$u(t) = 1 (t \geq 0)$ $= 0 (t < 0)$	$\frac{1}{s}$	$G(s) \cdot \frac{1}{s}$
ランプ応答	t	$\frac{1}{s^2}$	$G(s) \cdot \frac{1}{s^2}$

偏差	最終値の定理による導出
定常偏差	$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s}$
定常速度偏差	$e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)\mathcal{L}[t] = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s^2}$

二次遅れ要素の過渡応答

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

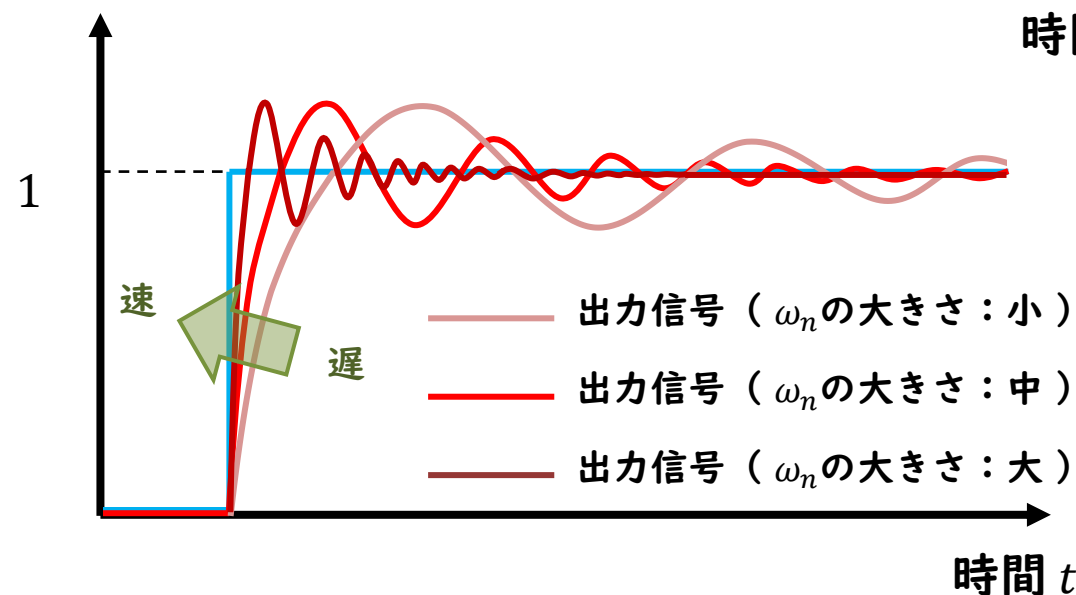
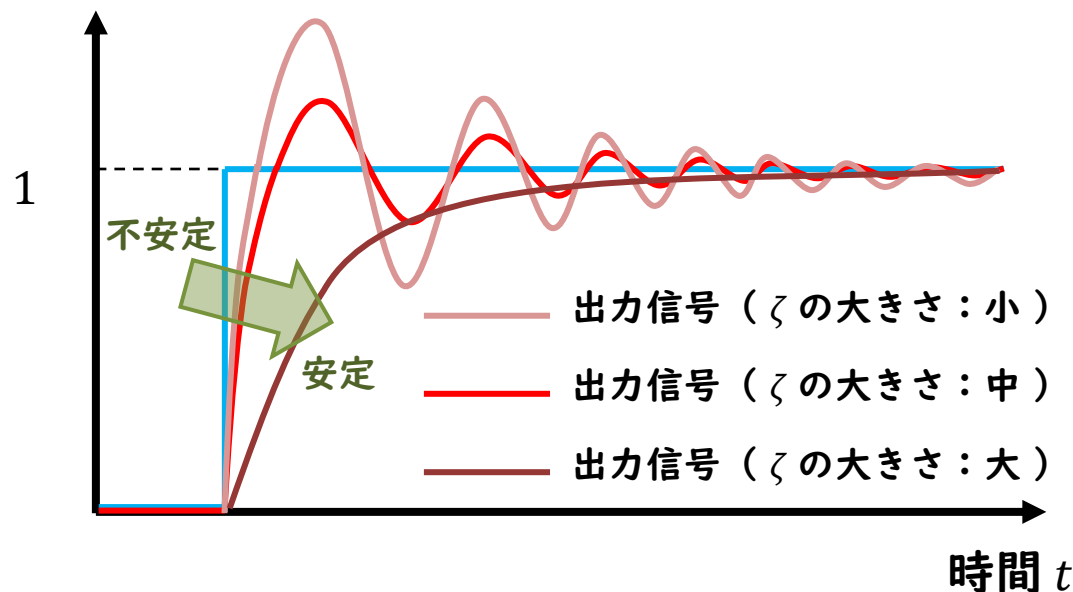
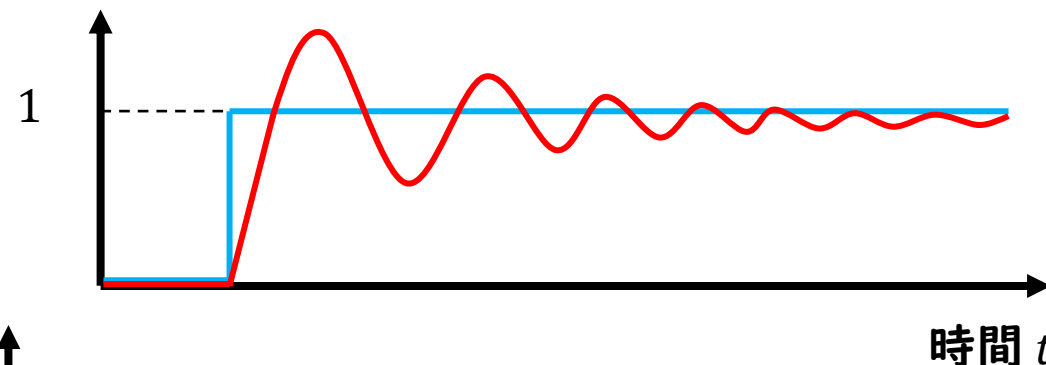
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{二次遅れ要素})$$

$$X(s) = U(s) = \frac{1}{s} \quad (\text{ステップ入力})$$

ステップ応答



— 入力信号 — 出力信号



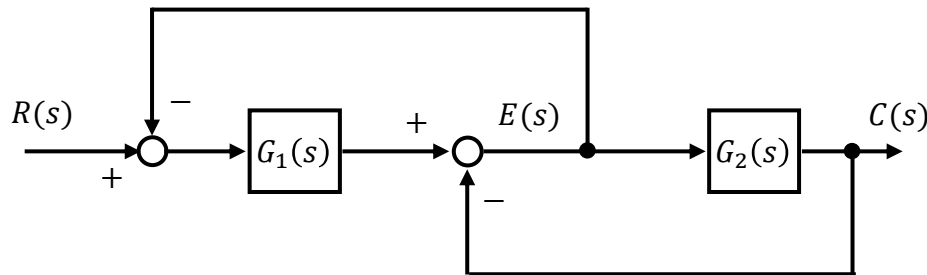
減衰定数 ζ ：安定性の尺度となり、大きいほど安定性は良好となる。

固有角振動数 ω_n ：速応性の尺度となり、大きいほど速応性は良好となる。

H10 問4 (機械・制御)

図のようなフィードバック系がある。次の問に答えよ。

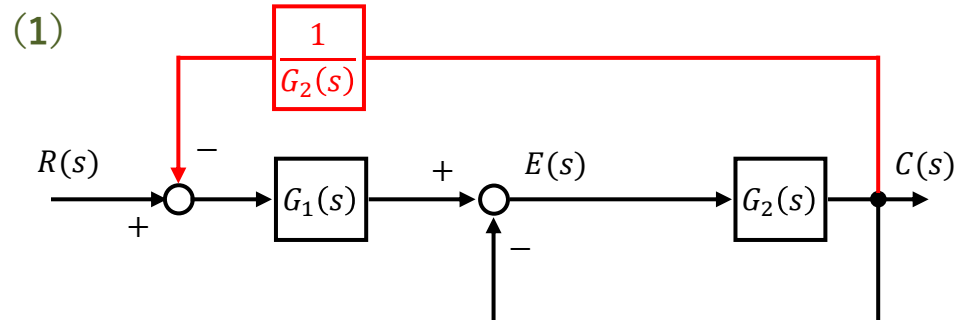
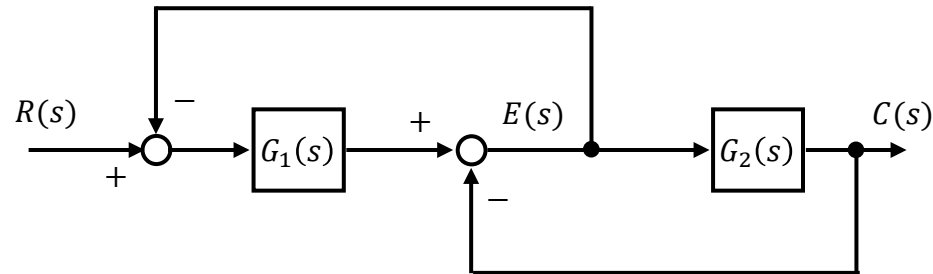
- (1) 図のブロック線図を等価変換し、 $E(s)$ における引出点を $G_2(s)$ の出力側に移したときのブロック線図を描け。
- (2) 問(1)で求めたブロック線図を用いて、入力 $R(s)$ と出力 $C(s)$ の間の伝達関数 $C(s)/R(s)$ を求めよ。
- (3) 伝達関数が、 $G_1(s) = 1$ 、 $G_2(s) = 2/s$ の場合について、 $R(s)$ が単位インパルスときの応答、すなわち単位インパルス応答 $c(t)$ を求めよ。



H10 問4 (解説)

図のようなフィードバック系がある。次の問に答えよ。

- (1) 図のブロック線図を等価変換し、 $E(s)$ における引出点を $G_2(s)$ の出力側に移したときのブロック線図を描け。
- (2) 問 (1) で求めたブロック線図を用いて、入力 $R(s)$ と出力 $C(s)$ の間の伝達関数 $C(s)/R(s)$ を求めよ。
- (3) 伝達関数が、 $G_1(s) = 1$ 、 $G_2(s) = 2/s$ の場合について、 $R(s)$ が単位インパルスときの応答、すなわち単位インパルス応答 $c(t)$ を求めよ。



(2)

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{G_2}{1+G_2} G_1}{1 + \frac{G_2}{1+G_2} G_1 \frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2}$$

(3)

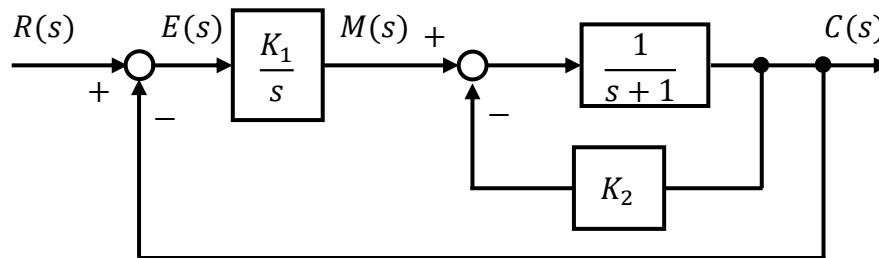
$$C(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2} \cdot 1 = \frac{1 \cdot \frac{2}{s}}{1 + 1 + \frac{2}{s}} = \frac{2}{2s + 2} = \frac{1}{s + 1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} c(t) = e^{-t}$$

H12 問4 (機械・制御)

図に示すフィードバック制御系について、次の問に答えよ。
ただし、 $R(s)$ は目標値、 $C(s)$ は制御量、 $E(s)$ は偏差、 K_1 および K_2 は定数である。

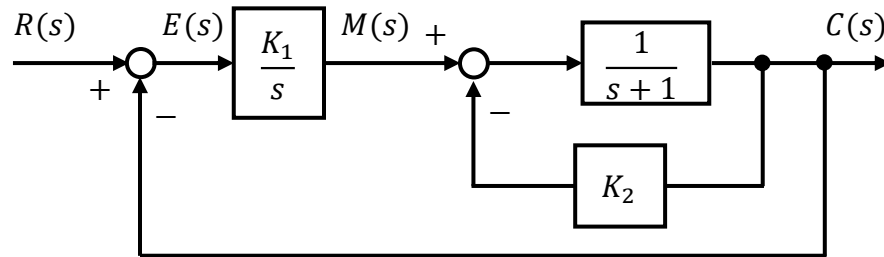
- (1) 閉ループ伝達関数 $W(s) = C(s)/R(s)$ を求めよ。
- (2) $W(s)$ を二次遅れ要素の標準形式で表したときの減衰係数 ζ が0.5、固有角周波数 ω_n が10 [rad/s]であるとして K_1 および K_2 の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた K_1 および K_2 の値を用いて、閉ループ伝達関数 $W_e(s) = E(s)/R(s)$ を求めよ。
- (4) (3) の結果を用いて、 $R(s)$ にランプ関数 $r(t) = t$ を加えたときの定常速度偏差 e_s を求めよ。



H12 問4 (解説)

図に示すフィードバック制御系について、次の問に答えよ。
ただし、 $R(s)$ は目標値、 $C(s)$ は制御量、 $E(s)$ は偏差、 K_1 および K_2 は定数である。

- (1) 閉ループ伝達関数 $W(s) = C(s)/R(s)$ を求めよ。
(2) $W(s)$ を二次遅れ要素の標準形式で表したときの減衰係数 ζ が0.5、固有角周波数 ω_n が10 [rad/s]であるとして K_1 および K_2 の値を求めよ。



$$(1) \quad \frac{C}{R} = \frac{\frac{K_1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot K_2} = \frac{\frac{K_1}{s} \cdot \frac{1}{s+1+K_2}}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot \frac{1}{s+1+K_2}} = \frac{K_1}{s(s+1+K_2)+K_1}$$

(2)

$$\frac{C}{R} = \frac{K_1}{s^2 + (1+K_2)s + K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

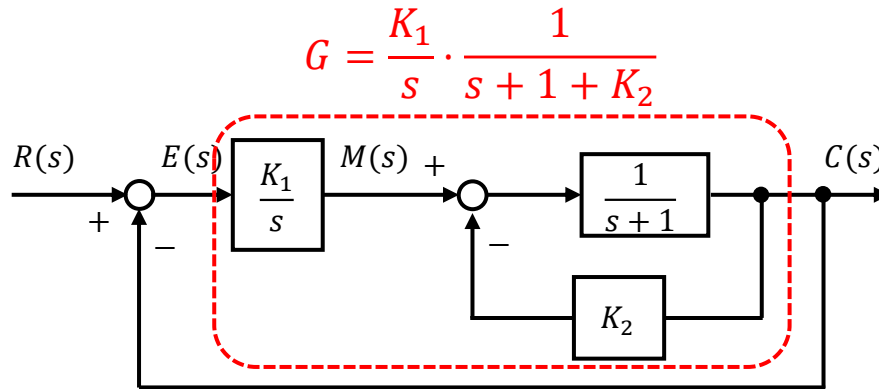
$$2\zeta\omega_n = 2 \times 0.5 \times 10 = 10 = 1 + K_2 \\ \rightarrow K_2 = 9$$

$$\omega_n^2 = 10^2 = 100 = K_1 \\ \rightarrow K_1 = 100$$

H12 問4 (解説)

(3) (2) で求めた K_1 および K_2 の値を用いて、閉ループ伝達関数 $W_e(s) = E(s)/R(s)$ を求めよ。

(4) (3) の結果を用いて、 $R(s)$ にランプ関数 $r(t) = t$ を加えたときの定常速度偏差 e_s を求めよ。



$$(3) \quad E = R - C, \quad C = GE \quad \begin{matrix} K_1 = 100 \\ K_2 = 9 \end{matrix}$$

$$E = R - GE$$

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1+G} = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s} \cdot \frac{1}{s+1+K_2}} = \frac{s(s+1+K_2)}{s(s+1+K_2) + K_1} = \frac{s(s+10)}{s(s+10) + 100}$$

$$(4) \quad r(t) = t \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$E_v(s) = \frac{s(s+10)}{s(s+10) + 100} R(s) = \frac{s(s+10)}{s(s+10) + 100} \frac{1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} e_v(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+10)}{s(s+10) + 100} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+10)}{s(s+10) + 100} = \frac{10}{100} = 0.1 \end{aligned}$$

H26 問4 (機械・制御)

問4 図1はフィードバック制御系の基本構成を示し、 $G_C(s)$ は補償器の伝達関数、 $G_P(s)$ は制御対象の伝達関数を表している。また、 $R(s)$ 、 $E(s)$ 、 $D(s)$ 及び $Y(s)$ は、目標値 $r(t)$ 、偏差 $e(t)$ 、外乱 $d(t)$ 及び制御量 $y(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。 $G_C(s) = \frac{4(s+1)}{s+2}$ 、 $G_P(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+5)}$ として、次の問に答えよ。

- (1) $D(s) = 0$ としたとき、 $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数を求めよ。
- (2) 上記(1)において、目標値として図2に示す大きさ a のステップ信号を入力したときの定常偏差を求めよ。
- (3) 上記(1)において、目標値として図3に示す傾き b のランプ信号を入力したときの定常偏差を求めよ。
- (4) $R(s) = 0$ としたとき、 $D(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。
- (5) 上記(4)において、外乱として図2に示す大きさ a のステップ信号を印加したとき、制御量の最終値を求めよ。
- (6) 上記(4)において、外乱として図3に示す傾き b のランプ信号を印加したとき、制御量は発散することを示せ。

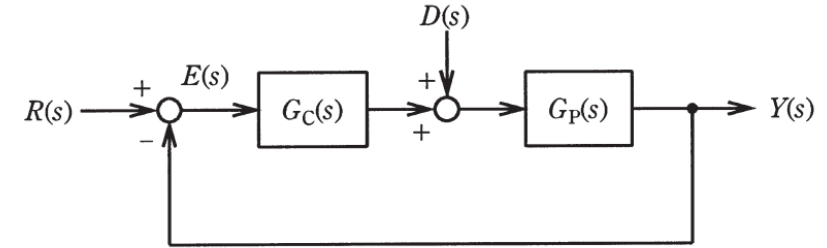


図1 フィードバック制御系

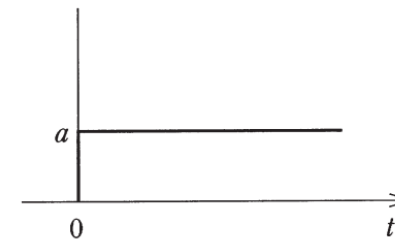


図2 ステップ信号

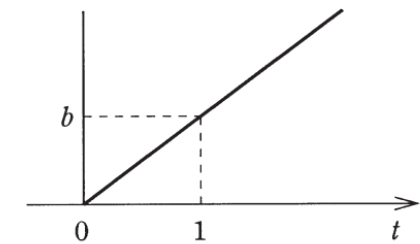


図3 ランプ信号

H26 問4 (解説)

問4 図1はフィードバック制御系の基本構成を示し、 $G_C(s)$ は補償器の伝達関数、 $G_P(s)$ は制御対象の伝達関数を表している。また、 $R(s)$ 、 $E(s)$ 、 $D(s)$ 及び $Y(s)$ は、目標値 $r(t)$ 、偏差 $e(t)$ 、外乱 $d(t)$ 及び制御量 $y(t)$ をそれぞれラプラス変換したものである。 $G_C(s) = \frac{4(s+1)}{s+2}$ 、 $G_P(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+5)}$ として、次の問に答えよ。

(1) $D(s) = 0$ としたとき、 $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数を求めよ。

(2) 上記(1)において、目標値として図2に示す大きさ a のステップ信号を入力したときの定常偏差を求めよ。

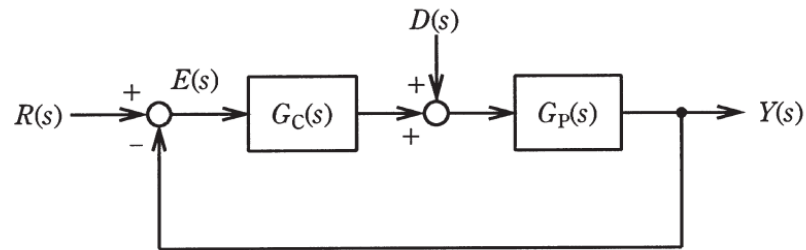


図1 フィードバック制御系

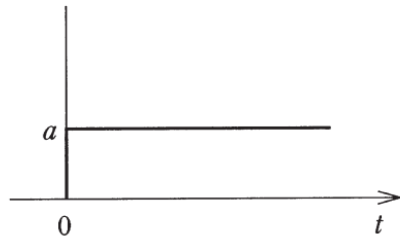


図2 ステップ信号

$$(1) \quad E = R - Y, \quad Y = G_C G_P E$$

$$E = R - G_C G_P E$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{R} &= \frac{1}{1 + G_C G_P} = \frac{1}{1 + \frac{4(s+1)}{s+2} \cdot \frac{1}{s(s^2+5s+5)}} \\ &= \frac{s(s+2)(s^2+5s+5)}{s(s+2)(s^2+5s+5) + 4(s+1)} \\ &= \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s + 4s + 4} \\ &= \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \end{aligned}$$

(2)

$$au(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} R(s) \\ &= \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{a}{s} \end{aligned}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{a}{s} = 0$$

H26 問4 (解説)

(3) 上記(1)において、目標値として図3に示す傾き b のランプ信号を入力したときの定常偏差を求めよ。

(4) $R(s) = 0$ としたとき、 $D(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。

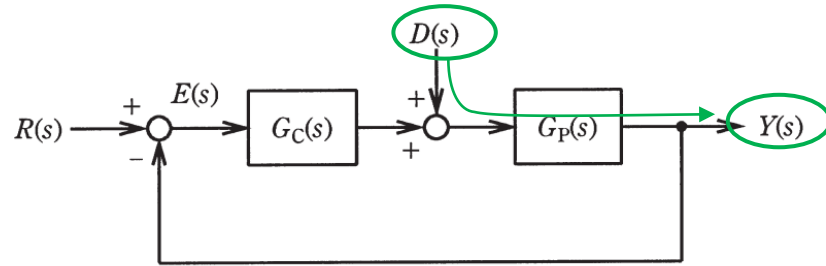


図1 フィードバック制御系

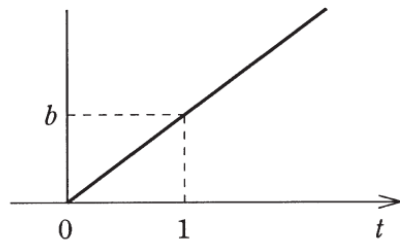


図3 ランプ信号

(3) $\mathcal{L} \quad bt \rightarrow \frac{b}{s^2}$

$$E_v(s) = \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} R(s) \\ = \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{b}{s^2}$$

$$e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{b}{s^2} \\ = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 10s}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{b}{s^2} \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 7s^2 + 15s + 10}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot b = \frac{10}{4} b = \frac{5}{2} b$$

(4) $Y = G_P(D + G_C E), \quad E = -Y$

$$Y = G_P(D - G_C Y) = G_P D - G_P G_C Y$$

$$\frac{Y}{D} = \frac{G_P}{1 + G_P G_C} = \frac{\frac{1}{s(s^2 + 5s + 5)}}{1 + \frac{1}{s(s^2 + 5s + 5)} \cdot \frac{4(s+1)}{s+2}} = \frac{s+2}{s(s+2)(s^2 + 5s + 5) + 4(s+1)} \\ \frac{Y}{D} = \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4}$$

H26 問4 (解説)

(5) 上記(4)において、外乱として図2に示す大きさ a のステップ信号を印加したとき、制御量の最終値を求めよ。

(6) 上記(4)において、外乱として図3に示す傾き b のランプ信号を印加したとき、制御量は発散することを示せ。

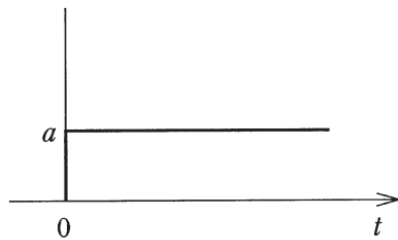


図2 ステップ信号

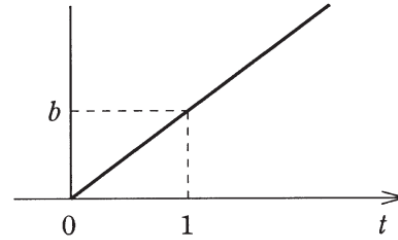


図3 ランプ信号

(6)

$$Y_d(s) = \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} D(s)$$

$$= \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{b}{s^2}$$

$$e_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{b}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{b}{s} = \infty$$

(5)

$$Y_d(s) = \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} D(s)$$

$$= \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{a}{s}$$

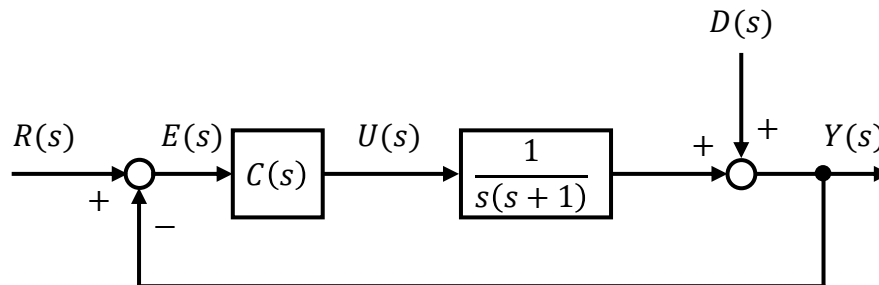
$$y_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot \frac{a}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 14s + 4} \cdot a = \frac{2}{4} a = \frac{a}{2}$$

H19 問4 (機械・制御)

図のようなフィードバック制御系について、次の問に答えよ。ただし、 $R(s)$ は目標値、 $D(s)$ は外乱、 $Y(s)$ は制御量、 $E(s)$ は偏差とする。

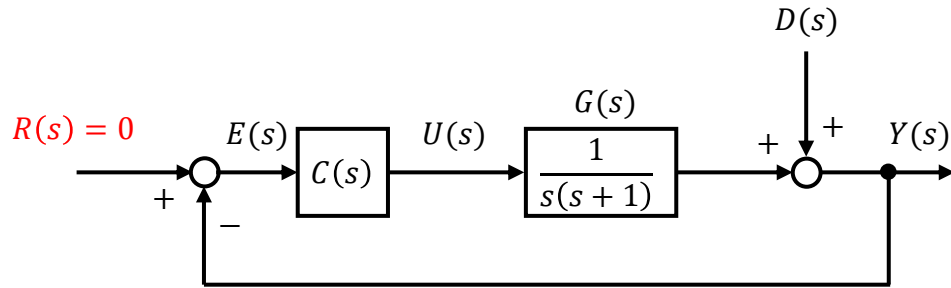
- (1) $R(s) = 0$ 、 $C(s) = K$ のとき、外乱 $D(s)$ の時間関数がランプ関数 $d(t) = 2t$ で与えられる場合の定常速度偏差を求めよ。
- (2) $C(s) = K$ のとき、閉ループ系の安定性の指標の一つである減衰定数 ζ を 0.8 に設定するための K の値を求めよ。
- (3) $C(s) = A \times \frac{s+1}{0.1s+1}$ の場合について、 $R(s)$ から $Y(s)$ までの閉ループ伝達関数を求めよ。
- (4) 上記 (3) のを用いた閉ループ系の減衰定数 ζ が 0.8 になるような A の値を求めよ。このとき、上記 (2) の場合と比較して閉ループ系の固有角周波数を求めることにより速応性はどのくらい変化したかを説明せよ。



H19 問4 (解説)

図のようなフィードバック制御系について、次の問に答えよ。ただし、 $R(s)$ は目標値、 $D(s)$ は外乱、 $Y(s)$ は制御量、 $E(s)$ は偏差とする。

(1) $R(s) = 0$ 、 $C(s) = K$ のとき、外乱 $D(s)$ の時間関数がランプ関数 $d(t) = 2t$ で与えられる場合の定常速度偏差を求めよ。



$$(1) \quad E = -Y, \quad Y = D + CGE$$

$$E = -D - CGE$$

$$\frac{E}{D} = -\frac{1}{1 + CG} = -\frac{1}{1 + K \cdot \frac{1}{s(s+1)}} = -\frac{s(s+1)}{s(s+1) + K}$$

$$d(t) = 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} D(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$E_v(s) = -\frac{s(s+1)}{s(s+1) + K} D(s) = -\frac{s(s+1)}{s(s+1) + K} \cdot \frac{2}{s^2}$$

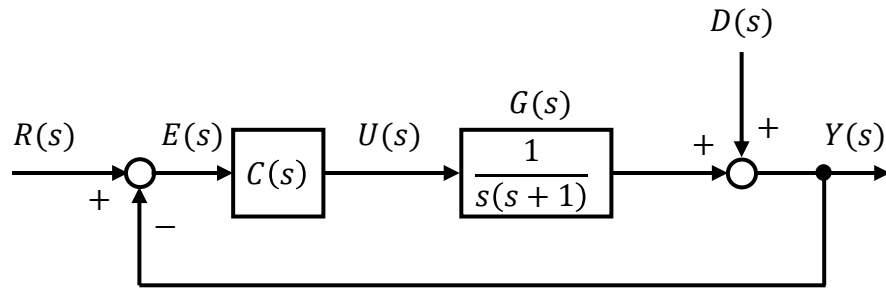
$$\begin{aligned} e_v(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{s(s+1)}{s(s+1) + K} \cdot \frac{2}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{(s+1)}{s(s+1) + K} \cdot 2 = -\frac{2}{K} \end{aligned}$$

H19 問4 (解説)

図のようなフィードバック制御系について、次の問に答えよ。ただし、 $R(s)$ (2) は目標値、 $D(s)$ は外乱、 $Y(s)$ は制御量、 $E(s)$ は偏差とする。

(2) $C(s) = K$ のとき、閉ループ系の安定性の指標の一つである減衰定数 ζ を0.8に設定するための K の値を求めよ。

(3) $C(s) = A \times \frac{s+1}{0.1s+1}$ の場合について、 $R(s)$ から $Y(s)$ までの閉ループ伝達関数を求めよ。



$$\begin{aligned} \frac{Y}{R} &= \frac{CG}{1+CG} = \frac{K \cdot \frac{1}{s(s+1)}}{1 + K \cdot \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{K}{s(s+1) + K} \\ &= \frac{K}{s^2 + s + K} = \frac{\omega_n^2}{s + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

$$\omega_n^2 = K_1 \rightarrow \omega_n = \sqrt{K_1}$$

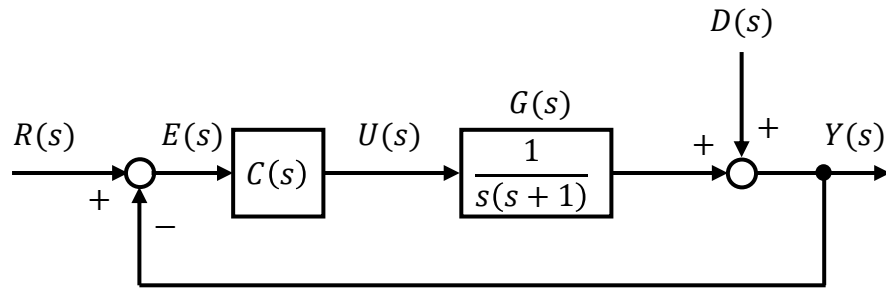
$$2\zeta\omega_n = 2 \times 0.8 \times \sqrt{K_1} = 1 \rightarrow K_2 = \left(\frac{1}{1.6}\right)^2 = 0.391$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \frac{Y}{R} &= \frac{CG}{1+CG} = \frac{A \times \frac{s+1}{0.1s+1} \cdot \frac{1}{s(s+1)}}{1 + A \times \frac{s+1}{0.1s+1} \cdot \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{A \times \frac{1}{0.1s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + A \times \frac{1}{0.1s+1} \cdot \frac{1}{s}} \\ &= \frac{A}{s(0.1s+1) + A} = \frac{1}{0.1} \cdot \frac{A}{s^2 + \frac{1}{0.1}s + \frac{A}{0.1}} \\ &= \frac{10A}{s^2 + 10s + 10A} \end{aligned}$$

H19 問4 (解説)

図のようなフィードバック制御系について、次の問に答えよ。ただし、 $R(s)$ は目標値、 $D(s)$ は外乱、 $Y(s)$ は制御量、 $E(s)$ は偏差とする。

(4) 上記 (3) のを用いた閉ループ系の減衰定数 ζ が0.8になるような A の値を求めよ。このとき、上記 (2) の場合と比較して閉ループ系の固有角周波数を求めることにより速応性はどのくらい変化したかを説明せよ。



$$(4) \quad \frac{Y}{R} = \frac{10A}{s^2 + 10s + 10A} = \frac{\omega_n^2}{s + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 10A \rightarrow \omega_n = \sqrt{10A}$$

$$2\zeta\omega_n = 2 \times 0.8 \times \sqrt{10A} = 10 \rightarrow A = \frac{1}{10} \left(\frac{10}{1.6} \right)^2 = 3.91$$

(2) と (4) の固有角周波数を比べると

$$\omega_{n2} = \frac{0.391}{2\zeta} = \frac{0.391}{2 \times 0.8}, \quad \omega_{n4} = \frac{3.91}{2\zeta} = \frac{3.91}{2 \times 0.8}$$

(4) の固有角周波数は10倍大きいことから、
(4) の閉ループ系の速応性は10倍改善されたことになる。

ご聴講ありがとうございました!!